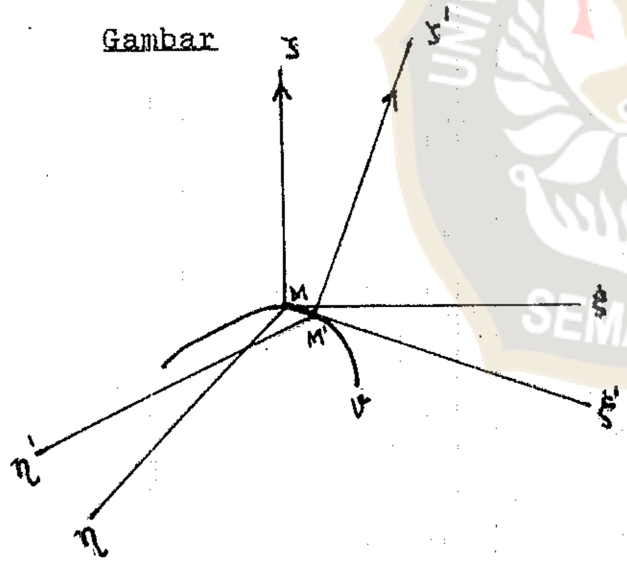
BAB II

TEOREMA PENUNJANG

II.1. TRIHEDRAL BERGERAK

Untuk v merupakan kurva sembarang, dan titik M merupakan titik pusat sumbu-sumbu tegak, titik M pada kurva v dan sumbu-sumbu itu dapat bergeser dan berputar sepanjang kurva v, sedang letak sumbu-sumbunya ditentukan oleh garis singgung, normal utama dan binormal dari kurva v.

Gambar



M sebagai pusat sumbu-sumbu dengan koordinat , , . Dan M´ sebagai pusat dengan sumbu-sumbu , , . Akan terbentuk titik-titik pusat lainnya sepanjang kurva v, pergeseran dan perputaran sumbu-sumbu ini disebut : Trihedral Bergerak.

Sedang pengertian dari Trihedral T ialah :

Permukaan yang didapat dengan menggerakkan sumbu-sumbu tegak. Untuk trihedral dengan titik pusat M di mana kosinus arah garis singgung ,ß, ; kosinus arah normal utama l,m,n sedang kosinus arah binormal , , sehingga untuk :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ l & m & n \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 1$$

Dengan acuan trihedral pada titik M, maka akan terdapat :

$$\alpha = 1 \qquad l = 0 \qquad \lambda = 0$$

$$\beta = 0 \qquad m = 1 \qquad \mu = 0$$

$$\gamma = 0 \qquad n = 0 \qquad \nu = 0$$

Bila trihedral mulai bergerak rasio pertambahan fungsi-fungsi ini dapat diambil dalam bentuk S dengan nilai :

$$\frac{d\alpha}{ds} = 0 \qquad \frac{dl}{ds} = -\frac{1}{} \qquad \frac{d\lambda}{ds} = 0$$

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{1}{} \qquad \frac{dm}{ds} = 0 \qquad \frac{d\mu}{ds} = \frac{1}{}$$

$$\frac{d\gamma}{ds} = 0 \qquad \frac{dn}{ds} = -\frac{1}{} \qquad \frac{d\nu}{ds} = 0$$

Dimana ξ, η, ζ adalah fungsi S

Untuk MM′ = Δ s, karena rasio pertambahan α adalah 0 dan $\alpha = 1$ pada M, kosinus sudut antara sumbu ξ dan ξ' ′ dengan bentuk lebih tinggi order pertama dalam Δ s, sedang kosinus sudut antara sumbu-sumbu $-\xi$ dan η adalah $-\Delta s/\rho$.

Misal P sebuah titik yang koordinat-koordinatnya terhadap trihedral pada M adalah ξ, η, ζ dan kurva pada M misal C sehingga P dinyatakan sebuah lintasan Γ sehingga P relatif tetap pada trihedral bergerak.

Dalam bentuk umum ini bila P menyatakan titik pada Γ yang berhubungan dengan M′ pada C koordinat-koordinat P′ relatif terhadap sumbu-sumbu pada M dan M′ dapat ditulis :

$$\xi + \Delta_1 \xi \qquad \xi + \Delta_2 \xi$$

$$\eta + \Delta_1 \eta \qquad \eta + \Delta_2 \eta$$

$$\zeta + \Delta_1 \zeta \qquad \zeta + \Delta_2 \zeta$$

Bila $P_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ dan a,b,c menyatakan arah kosinus dari PP_1 terhadap sumbu-sumbu pada M dan t menyatakan jarak antara P dan a maka :

$$\xi_1 = \xi + at \quad , \quad \eta_1 = \eta + bt \quad , \quad \zeta_1 = \zeta + ct$$

Bila M´ mendekati M maka hubungan dasar antara a,b,c adalah :

$$\frac{\delta a}{ds} = \frac{da}{ds} - \frac{b}{p} \quad , \quad \frac{\delta b}{ds} = \frac{db}{ds} + \frac{a}{\rho} + \frac{c}{\tau} \quad , \quad \frac{\delta c}{ds} = \frac{dc}{ds} - \frac{b}{\tau}$$

Dan jika titik P tetap ketika M bergerak sepanjang kurva akan didapat :

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{\eta}{\rho} - 1 \quad , \quad \frac{d\eta}{ds} = -\left(\frac{\xi}{\rho} + \frac{\zeta}{\tau}\right) \quad , \quad \frac{d\zeta}{ds} = \frac{\eta}{\tau}$$

Sehingga arah-arah kosinus sebuah garis tetap dalam ruang adalah :

$$\frac{da}{ds} = \frac{b}{\rho} \quad , \quad \frac{db}{ds} = -\left(\frac{a}{\rho} + \frac{c}{\tau}\right) \quad , \quad \frac{dc}{ds} = \frac{b}{\tau}$$

Untuk sebuah trihedral lain yang juga terdiri dari garis singgung, normal utama dan binormal dari kurva v = konstan melalui M yaitu trihedral t_u, maka arah-arah kosinus a´,b´,c´ dari sebuah garis L tertentu dalam ruang dengan sumbu dasar t_u bila titik awal bergerak sepanjang kurva C_u adalah :

$$\frac{da'}{ds} = \frac{b}{\rho_u} \quad , \quad \frac{db'}{d_u} = -\left(\frac{a'}{\rho_u} + \frac{c'}{\tau_u}\right) \quad , \quad \frac{dc'}{ds_u} = \frac{b'}{\tau_u} \quad \ldots (2.1)$$

Dengan ρ_u, T_u menyatakan jari-jari pertama dan kedua sedang kelengkungan C_u dan ds_u merupakan elemen liniernya yang dapat dinyatakan sebagai $\sqrt{E}\,du$.

Arah kosinus L terhadap trihedral T adalah :

$$\left.\begin{aligned} a &= a'\cos U - (b'\sin \bar{\omega}_u - c'\cos \bar{\omega}_u)\sin U \\ b &= a'\sin U + (b'\sin \bar{\omega}_u - c'\cos \bar{\omega}_u)\cos U \\ c &= b'\cos \bar{\omega}_u + c'\sin \bar{\omega}_u \end{aligned}\right\} \quad (2.2)$$

Dengan $\bar{\omega}_u$ merupakan sudut antara sumbu Z dan normal utama ke C_u pada M dengan arah positip, sudut ini diukur dengan arah positip terhadap binormal C_u.

Dari (2.1) dan (2.2) didapat :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial u} &= br - cq \\ \frac{\partial b}{\partial u} &= cp - ar \\ \frac{\partial c}{\partial u} &= aq - bp \end{aligned}\right\} \quad (2.3)$$

Dengan p,q,r memenuhi :

$$\left.\begin{aligned} p &= \sqrt{E}\left[\cos U\left(\frac{d\bar{\omega}_u}{ds_u} - \frac{1}{T_u}\right) + \sin U\,\frac{\cos \bar{\omega}_u}{\rho_u}\right] \\ q &= \sqrt{E}\left[\sin U\left(\frac{d\bar{\omega}_u}{ds_u} - \frac{1}{T_u}\right) - \cos U\,\frac{\cos \bar{\omega}_u}{\rho_u}\right] \\ r &= \sqrt{E}\left(\frac{\sin \bar{\omega}_u}{\rho_u} - \frac{dU}{ds_u}\right) \end{aligned}\right\} \quad (2.4)$$

Bila t_v adalah trihedral dari kurva u = konstan melalui M yaitu kurva C_v maka persamaan (2.1) menjadi :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial v} &= br_1 - cq_1 \\ \frac{\partial b}{\partial v} &= cp_1 - ar_1 \\ \frac{\partial c}{\partial v} &= aq_1 - bp_1 \end{aligned}\right\rangle \quad (2.5)$$

Dengan p_1, q_1, r_1 bisa didapat dari (2.4) dengan menggantikan $\sqrt{E}$, U, s_u, $\bar{\omega}_u$, ρ_u, τ_u digantikan dengan $\sqrt{G}$, V, s_v, $\bar{\omega}_v$, ρ_v, τ_v bila V menyatakan sudut antara garis singgung kurva Cv pada M dengan sumbu x maka :

$$V - U = \quad .... \qquad (2.6)$$

Bila titik M bergerak sepanjang kurva lain yang bukan garis parametrik, yaitu sepanjang sebuah kurva yang ditentukan oleh nilai dv/du maka harga-harga a,b,c ditulis :

$$\frac{\partial a}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial a}{\partial v}\frac{dv}{ds}$$

$$\frac{\partial b}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial b}{\partial v}\frac{dv}{ds}$$

$$\frac{\partial c}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial c}{\partial v}\frac{dv}{ds}$$

II.2. PERSYARATAN PERSAMAAN-PERSAMAAN DASAR

Bahan dan teorema yang akan dibahas dalam bab III sebagian besar adalah hasil karya Ribaucour, teorema yang disusun ada hubungannya dengan hasil penelitian Riccati yaitu tentang perbandingan silang dan transformasi Bianchi. Dalam penulisan ini Ribaucour membahas sifat-sifat khusus tentang kongruensi yang diterapkan pada lingkaran-lingkaran dan Ribaucour mempelajari kongruensi dari data kurva dan dalam hal ini kurva yang berhubungan dengan trihedral bergerak.

Bayangkan sebuah trihedral kedua T_0 yang titik acuannya O tertentu dalam ruang seputar titik ini, trihedral bergerak sedemikian hingga tepi-tepinya sejajar dengan tepi-tepi trihedral T, ketika titik dasar trihedral T bergerak pada permukaan. Posisi T_0 ditentukan oleh sembilan arah kosinus dari tepi-tepinya dengan tiga garis saling tegak lurus L_1, L_2, L_3 yang melalui U, misalkan arah kosinusnya adalah a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3. Fungsi-fungsi ini memenuhi persamaan :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial u} &= br - cq & \frac{\partial b}{\partial u} &= cp - ar & \frac{\partial c}{\partial u} &= aq - bp \\ \frac{\partial a}{\partial v} &= br_1 - cq_1 & \frac{\partial b}{\partial v} &= cp_1 - ar_1 & \frac{\partial c}{\partial u} &= aq - bp \end{aligned}\right\} \quad (2.7)$$

Dari dua persamaan pertama diambil harga-harga dari persamaan lainnya.

Maka dari $\dfrac{\partial^2 a}{\partial u \, \partial v}$ didapat :

$$b \left(\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} - pq_1 + qp_1 \right) = c \left(\frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u} - rp_1 + pr_1 \right)$$

Persamaan ini benar bila b dan c mempunyai harga b_1, c_1, b_2, c_2, b_3, c_3 dan yang ada di dalam kurung harus sama dengan nol, identik untuk $\frac{\partial^2 b}{\partial u \partial v}$ dan $\frac{\partial^2 c}{\partial u \partial v}$ sehingga persamaan dasarnya :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} &= qr_1 - rq_1 \\ \frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u} &= rp_1 - pr_1 \\ \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} &= pq_1 - qp_1 \end{aligned}\right\} \quad (2.8)$$

Ini merupakan syarat perlu dan cukup dari fungsi p, p_1, q, q_1, r, r_1 supaya kesembilan fungsi $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$, a_3, b_3, c_3 dapat menentukan posisi trihedral T_0 maka p, p_1, q, q_1, r, r_1 dinamakan rotasi.

Bayangkan kembali bentuk trihedral pertama yaitu trihedral T dan t_u dimana x, y, z dan x', y', z' menyatakan koordinat-koordinat sebuah titik P terhadap trihedral T dan t_u, koordinat-koordinat ini mempunyai hubungan dimana :

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos U - (y' \sin \bar{\omega} u - z' \cos \bar{\omega} u) \sin U \\ y &= x' \sin U + (y' \sin \bar{\omega} u - z' \cos \bar{\omega} u) \cos U \\ z &= y' \cos \bar{\omega} u + z' \sin \bar{\omega} u \end{aligned}\right\} \quad (2.9)$$

Perpindahan P terhadap t_u pada M dinyatakan dengan δ dan pertambahan relatif terhadap hubungan sumbu-sumbu bergerak dengan d ialah :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta x'}{ds_u} &= \frac{dx'}{ds_u} - \frac{y'}{\rho_u} + 1 \\ \frac{\delta y'}{ds_u} &= \frac{dy'}{ds_u} + \frac{x'}{\rho_u} + \frac{z'}{\tau_u} \\ \frac{\delta z'}{ds_u} &= \frac{dz'}{ds_u} - \frac{y'}{\tau_u} \end{aligned}\right\rangle \quad (2.10)$$

Dari (2.9), (2.10) dan (2.4) akan didapat :

$$\frac{\delta x}{\partial u} = \frac{dx}{\partial u} + \sqrt{E}\cos U - ry + qz$$

$$\frac{\delta y}{\partial u} = \frac{dy}{\partial u} + \sqrt{E}\sin U - pz + rx$$

$$\frac{\delta z}{\partial u} = \frac{dz}{\partial u} - qx + py$$

Persamaan yang sama pula berlaku untuk t_v sehingga bila trihedral T bergerak pada permukaan, dengan titik acuan M, membuat sebuah kurva yang ditentukan oleh sebuah nilai $\frac{dv}{du}$, pertambahan koordinat-koordinat sebuah titik P(x,y,z) dalam arah-arah sumbu-sumbu trihedral mempunyai nilai :

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= dx + \xi du + \xi_1 dv + (qdu + q_1 dv)z - (rdu + r_1 dv)y \\ \delta y &= dy + \eta du + \eta_1 dv + (rdu + r_1 dv)x - (pdu + p_1 dv)y \\ \delta z &= dz \qquad\qquad\qquad\quad + (pdu + p_1 dv)y - (qdu + q_1 dv)x \end{aligned}\right\rangle \quad (2.11)$$

Dengan :

$\xi = \quad E \cos U \qquad\qquad \eta = \quad E \sin U$

$\xi_1 = \quad G \cos V \qquad\qquad \eta_1 = \quad G \sin V$

$\quad = \quad G \cos (\quad + U) \qquad\qquad = \quad G \sin (\quad + U)$

II.3. SISTIM KONYUGASI

Dua kurva pada permukaan melalui sebuah titik M dikatakan mempunyai arah-arah konyugasi, bila garis-garis singgung pada M berpotongan dengan diameter dari Indikatrik Dupin*) untuk titik M. Garis-garis singgung ini juga sejajar dengan diameter konyugasi dari irisan kerucut (conic) dimana permukaan dipotong oleh sebuah bidang yang sejajar bidang singgung ke M dan sekitarnya. Misal P menyatakan sebuah titik dari kerucut ini dan N merupakan titik dimana bidang a memotong normal pada N, bidang singgung ke permukaan pada P bertemu bidang a dalam garis singgung ke kerucut pada P, selanjutnya bila garis singgung ini sejajar dengan diameter konyugasi ke NP sehingga ketika P mendekati M garis singgung ini mendekati diameter Indikatrik Dupin yang merupakan konyugasi terhadap diameter dalam arah MP, sehingga disimpulkan sifat-sifat bidang singgung ke sebuah permukaan, akan merupakan bidang singgung permukaan dalam arah konyugasi ke kurva, bila titik singgung bergerak sepanjang sebuah kurva.

Telah kita ketahui untuk persamaan bidang singgung adalah :

$$(\xi - x)X + (\eta - y)Y + (\zeta - z)Z = 0$$

Dengan , , merupakan koordinat yang bersangkutan maka sifat-sifatnya didifinisikan sebagai :

$$(\xi - x)\frac{dX}{ds} + (\eta - y)\frac{dY}{ds} + (\zeta - z)\frac{dZ}{ds} = 0$$

---

*) Pengertian Indikatrik Dupin ada pada lampiran tambahan.

Dengan S merupakan busur kurva, tempat titik singgung bergerak. Bila δx, δy, δz menyatakan pertambahan x,y,z dalam arah konyugasi ke kurva maka dari persamaan di atas didapat :

$$\delta x\ dX + \delta y\ dY + \delta z\ dZ = 0$$

Bila pertambahan u dan v dalam arah konyugasi dinyatakan dengan δu dan δv maka persamaan di atas dapat dinyatakan sebagai :

$$D\ du\ \ u + D'\ (du\ \ v + dv\ \ u) + D''\ dv\ \ v = 0 \quad (2.12)$$

Arah-arah konyugasi pada kurva sembarang dari keluarga :

$$\varnothing\ (u,v) = \text{konstan} \quad \ldots (2.13)$$

Diberikan oleh :

$$\left(D\frac{\partial\varnothing}{\partial v} - D'\frac{\partial\varnothing}{\partial u}\right)\delta u + \left(D'\frac{\partial\varnothing}{\partial v} - D''\frac{\partial\varnothing}{\partial u}\right)\delta v = 0$$

Karena ini merupakan sebuah persamaan differensial orde satu dan tingkat satu, persamaan ini mendifinisikan sebuah keluarga kurva berparameter tunggal. Kurva-kurva ini dan kurva $\varnothing$ = konstan, dikatakan membentuk sebuah sistim konyugate, sehingga dua keluarga kurva-kurva sembarang dikatakan membentuk sebuah sistim konyugate bila garis-garis singgung ke sebuah kurva ke famili pada titik potongnya mempunyai arah-arah konyugasi dari (2.12) tampak bahwa kurva-kurva konyugasi ke kurva v =

konstan didifinisikan dengan $D\,\delta u + D'\,\delta v = 0$. Akibatnya supaya kurva-kurva konyugate ini merupakan u = konstan, maka D′ harus sama dengan nol, sehingga dapat disimpulkan :

> Sebuah syarat yang perlu dan cukup bahwa kurva parameter membentuk sistim konyugate ialah D′ sama dengan nol.

Bila garis-garis kelengkungan merupakan parametrik dan sudut-sudut yang dibuat oleh sepasang arah konyugasi dengan garis singgung ke kurva v = konstan dinyatakan dengan θ dan θ′ maka :

$$\tan\theta = \sqrt{\frac{G}{E}}\,\frac{dv}{du} \quad , \quad \tan\theta' = \sqrt{\frac{G}{E}}\,\frac{\delta v}{\delta u}$$

Sehingga (2.12) dapat ditulis :

$$\tan\theta\,\tan\theta' = \frac{-\rho_2}{\rho_1} \quad \ldots (2.14)$$

Dan dikenal sebagai persamaan arah-arah konyugasi dari sebuah irisan kerucut.

II.4. DIFINISI SEBUAH KONGRUENSI

Suatu sistim garis lurus yang mempunyai dua parameter, atau dengan kata lain keluarga garis-garis lurus yang persamaannya mempunyai dua parameter bebas disebut sebuah kongruensi rechtilinier, sehingga dapat ditarik kesimpulan kongruensi terdiri dari tak terhingga banyaknya garis lurus. Salah satu contoh sistim semacam ini ialah normal-normal ke suatu permukaan, normal-normal ini juga merupakan normal ke keluarga permukaan yang sejajar dengan permukaan yang ditentukan. Pada umumnya garis-garis kongruensi bukan merupakan normal ke suatu permukaan, karena itu kongruensi dari normal-normal membentuk suatu klas khusus yaitu kongruensi normal. Contoh lain dari kongruensi adalah keluarga garis-garis lurus yang memotong dua kurva yang ditentukan, juga keluarga garis-garis lurus yang memotong suatu kurva dan menyinggung suatu permukaan.

Dari difinisi kongruensi tampak bahwa garis-garis kongruensi akan menembus suatu permukaan yang ditetapkan sedemikian hingga melalui salah satu titik pada permukaan itu lewat satu atau lebih garis-garis kongruensi dalam jumlah yang terhingga. Permukaan ini disebut permukaan acuan sehingga sebuah kongruensi dapat didifinisikan secara analitis sebagai koordinat-koordinat permukaan acuan dalam bentuk dua parameter u,v dan arah kosinus garis-garis dalam bentuk parameter tersebut, Maka kongruensi didifinisikan oleh :

$$\left.\begin{array}{lll} x = f_1(u,v) , & y = f_2(u,v) , & z = f_3(u,v) \\ X = \emptyset_1(u,v) , & Y = \emptyset_2(u,v) , & Z = \emptyset_3(u,v) \end{array}\right\} \quad (2.15)$$

Dengan fungsi-fungsi f dan Ø mempunyai domain u dan v tertentu dan fungsi-fungsi Ø adalah :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

Untuk menyatakan kongruensi atas satuan garis lengkung dibuat jari-jari sejajar dengan garis-garis kongruensi dan disebut spherik kongruensi sehingga dapat dituliskan :

$$\mathcal{E} = \sum \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 \quad , \quad \mathcal{F} = \sum \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} \quad , \quad \mathcal{G} = \sum \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2$$

Dengan elemen linier bentuk spheriknya :

$$d\sigma^2 = \mathcal{E}\, du^2 + 2\mathcal{F}\, dudv + \mathcal{G}\, dv^2$$

Bila :

$$e = \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u} \ , \ f = \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} \ , \ f' = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} \ , \ g = \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v}$$

Didapat bentuk kwadrat keduanya :

$$\sum dx\, dX = e\, du^2 + (f + f')\, du\, dv + g\, dv^2$$

yang merupakan dasar dalam teori kongruensi.

II.5. BENTUK SPHERIK PERMUKAAN POKOK DAN PERMUKAAN DAPAT DIHAMPARKAN

Telah kita ketahui syarat perlu dan cukup bahwa permukaan pokok dari sebuah kongruensi memotong permukaan acuan dalam garis-garis parameter :

$$\mathcal{F} = 0 \quad , \quad f + f' = 0$$

Dari syarat perlu dan cukup untuk permukaan-permukaan v = konstan, u = konstan dapat dilengkungkan, merupakan permukaan-permukaan pokok yaitu :

$$\tfrac{1}{2}(f + f')\mathcal{E} - e\mathcal{F} = 0 \quad , \quad \mathcal{G}\mathcal{F} - \tfrac{1}{2}(f + f') = 0$$

Bila permukaan-permukaan acuan merupakan pertengahan permukaan dari kongruensi dan bila r menyatakan $\frac{1}{2}$ jarak antara titik-titik limit, maka dari :

$$r = \frac{e\,du^2 + (f + f')\,du\,dv + g\,dv^2}{\mathcal{E}\,du^2 + 2\mathcal{F}\,du\,dv + \mathcal{G}\,dv^2} \quad \ldots. \ (2.15\ a)$$

Didapat :

$$e = -r\mathcal{E} \quad , \quad g = r\mathcal{G}$$

Bila nilai-nilai disubstitusi ke dalam :

$$(2.16)\left\langle\ \begin{aligned} &\frac{\partial e}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial u} - \left\{{12 \atop 1}\right\}'e + \left\{{11 \atop 1}\right\}'f - \left\{{12 \atop 2}\right\}'f' + \left\{{11 \atop 2}\right\}'g + \mathcal{F}\gamma - \mathcal{E}\gamma_1 = 0 \\ &\frac{\partial f'}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u} - \left\{{22 \atop 1}\right\}'e + \left\{{12 \atop 1}\right\}'f - \left\{{22 \atop 2}\right\}'f' + \left\{{12 \atop 2}\right\}'g + \mathcal{G}\gamma - \mathcal{F}\gamma_1 = 0 \\ &\frac{\partial \gamma}{\partial v} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial u} + f - f' = 0 \end{aligned}\right.$$

Maka dua persamaan pertama menjadi :

$$(2.17)\left\langle\ \begin{aligned} &\gamma_1 = -\frac{1}{\mathcal{E}}\frac{\partial}{\partial v}(r\mathcal{E}) - \sqrt{\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{E}}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{f}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}}\right) , \\ &\gamma_1 = -\frac{1}{\mathcal{G}}\frac{\partial}{\partial u}(r\mathcal{G}) - \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{G}}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{f}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}}\right) . \end{aligned}\right.$$

Dan yang terakhir menjadi :

$$(2.18)\begin{cases} 2\dfrac{\partial^2 r}{\partial u \partial v} + \dfrac{\partial \log \mathcal{E}}{\partial v}\dfrac{\partial r}{\partial u} + \dfrac{\partial \log \mathcal{G}}{\partial u}\dfrac{\partial r}{\partial v} + \dfrac{\partial^2 \log \mathcal{E}\mathcal{G}}{\partial u\, \partial v} r + \\ + \dfrac{\partial}{\partial u}\left[\sqrt{\dfrac{\mathcal{G}}{\mathcal{E}}}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{f}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}}\right)\right] + \dfrac{\partial}{\partial v}\left[\sqrt{\dfrac{\mathcal{E}}{\mathcal{G}}}\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{f}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}}\right)\right] + 2f = 0 \end{cases}$$

Selanjutnya untuk :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \alpha \frac{\partial X}{\partial u} + \beta \frac{\partial X}{\partial v} + \gamma X$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \alpha_1 \frac{\partial X}{\partial u} + \beta_1 \frac{\partial X}{\partial v} + \gamma_1 X$$

Menjadi :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = - r\frac{\partial X}{\partial u} - \frac{f}{\mathcal{G}}\frac{\partial X}{\partial v} + \gamma X$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{f}{\mathcal{E}}\frac{\partial X}{\partial u} + r\frac{\partial X}{\partial v} + \gamma_1 X$$

dengan γ dan γ_1 diberikan oleh (2.17), begitu pula persamaan-persamaan dalam y dan z.

Sekarang tinggal menentukan pasangan-pasangan fungsi r dan f yang memenuhi (2.18). Salah satu dari fungsi-fungsi ini dapat dipilih secara sembarang dan yang lain didapat dengan solusi sebuah persamaan diffe-rensial parsiel orde kedua sehingga sistim ortogonal sembarang pada satuan bola berlaku untuk menyatakan permukaan-permukaan pokok dari sebuah keluarga kongru-ensi yang persamaannya mencakup tiga persamaan semba-rang.

Supaya kurva parametrik pada bola menyatakan da-pat dihamparkannya sebuah kongruensi, syarat perlu dan cukup adalah :

$$f\mathcal{E} - e\mathcal{F} = 0 \quad , \quad g\mathcal{F} - f\mathcal{G} = 0$$

Seperti tampak dari :

$$\begin{vmatrix} \mathcal{E}\, du + \mathcal{F}\, dv & , & \mathcal{F}\, du + \mathcal{G}\, dv \\ e\, du + f\, dv & , & f'\, du + g\, dv \end{vmatrix} = 0$$

Bila permukaan acuan merupakan pertengahan permukaan dan ρ menyatakan setengah jarak antara titik-titik fokus maka dari (2.15a) berlaku :

$$\rho = -\frac{e}{\mathcal{E}} = \frac{g}{\mathcal{G}}$$

Dengan mengkombinasikan persamaan-persamaan di atas didapat :

$$e = -\rho\mathcal{E} \quad , \quad f = -f' = \rho\mathcal{F} \quad , \quad g = \rho\mathcal{G} \qquad \ldots (18.a)$$

Substitusi nilai-nilai ini ke dalam kedua persamaan pertama ke dalam (2.16) dan hasil-hasil persamaan yang didapat diselesaikan untuk γ , γ_1 maka didapat :

$$\gamma = \frac{\partial\rho}{\partial u} + 2\{^{12}_{2}\}'\rho \quad , \quad \gamma_1 = -\frac{\partial\rho}{\partial v} - 2\{^{12}_{1}\}'\rho$$

Sehingga persamaan terakhir (2.16) menjadi :

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} + \{^{12}_{1}\}'\frac{\partial\rho}{\partial u} + \{^{12}_{2}\}'\frac{\partial\rho}{\partial v} + [\frac{\partial}{\partial u}\{^{12}_{1}\}' + \frac{\partial}{\partial v}\{^{12}_{2}\}' + \mathcal{F}\,]\rho = 0$$

Setiap penyelesaian persamaan ini menentukan sebuah kongruensi dengan unsur-unsur dapat dihamparkannya yang diketahui dan permukaan tengah diberikan oleh bentuk kwadrat :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u} &= -\rho\frac{\partial X}{\partial u} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial u} + 2\{^{12}_{2}\}'\rho\right) X \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= -\rho\frac{\partial X}{\partial v} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial v} + 2\{^{12}_{1}\}'\rho\right) X\end{aligned}\right\rangle \quad (2.19)$$

Dan persamaan untuk Y dan Z sama dengan untuk X.

Subsitusi nilai-nilai (18.a) ke dalam :

$$(\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2)\bar{r}^{2\,2} + [g\mathcal{E} - (f+f')\mathcal{F} + e\mathcal{G}]\bar{r} + eg - \left(\frac{f+f'}{2}\right)^2 = 0$$

Sehingga didapat :

$$(\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2)\bar{r}^2 - \rho^2\mathcal{E}\mathcal{G} = 0$$

Akibatnya persamaan :

$$\sin\theta = \cos 2\omega_1 = \cos^2\omega_1 - \cos^2\omega_2 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{r_1 - r_2}$$

Menjadi : $$\sin\theta = \frac{2\rho}{2\bar{r}} = \frac{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}}$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa :

> Sudut antara bidang-bidang fokus dari sebuah kongruensi adalah sama dengan sudut antara garis-garis pada bentuk spherik dapat dihamparkannya yang bersangkutan.

II.6. KONGRUEN RIBAUCOUR

Misal S_1 merupakan permukaan acuan, ditarik garis-garis paralel terhadap normal-normal ke S.

Bila normal-normal diajukan pada garis-garis asimtotnya maka :

$$e = \sum \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u} = -\frac{D'\mathcal{E}\,\emptyset}{HK} \quad , \quad f = \sum \frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{D'\mathcal{F}\,\emptyset}{HK}$$

$$f' = \sum \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = -\frac{D'\mathcal{F}\,\emptyset}{HK} \quad , \quad g = \sum \frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{D'\mathcal{G}\,\emptyset}{HK}$$

Karena nilai-nilai ini memenuhi syarat :

$$f'\mathcal{E} - e\mathcal{F} = 0 \quad , \quad g\mathcal{F} - f\mathcal{G} = 0$$

Permukaan-permukaan teratur dengan u = konstan, v = konstan. Dapat dihamparkan dan karena $\rho_1 + \rho_2 = 0$, S_1 merupakan permukaan tengah kongruensi. Tetapi kurva-kurva parametrik pada S_1 membentuk sebuah sistim konyugate bila garis-garis asimtot pada S merupakan parametrik sehingga dapat disimpulkan :

> Permukaan-permukaan dapat dihamparkan dari sebuah kongruensi Ribaucour memotong permukaan tengah dalam sebuah sistim konyugate.

Akan dibuktikan bahwa sifat-sifat di atas merupakan ciri khusus kongruensi Ribaucour. Turunkan persamaan (2.19) terhadap v, kemudian dipermudah karena X dan memenuhi persamaan :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = \{{}^{11}_{\ 1}\}' \frac{\partial X}{\partial u} + \{{}^{11}_{\ 2}\}' \frac{\partial X}{\partial v} - \mathcal{E} X \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = \{{}^{12}_{\ 1}\}' \frac{\partial X}{\partial u} + \{{}^{12}_{\ 2}\}' \frac{\partial X}{\partial v} - \mathcal{F} X \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial v^2} = \{{}^{22}_{\ 1}\}' \frac{\partial X}{\partial u} + \{{}^{22}_{\ 2}\}' \frac{\partial X}{\partial v} - \mathcal{G} X \quad .$$

dan :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \left(\frac{\partial \log \rho}{\partial v} + \{{}^{12}_{\ 1}\}'\right) \frac{\partial x_1}{\partial u} + \left(\frac{\partial \log \rho}{\partial u} + \{{}^{12}_{\ 2}\}'\right) \frac{\partial x_1}{\partial v} + \\ + \left(\frac{\partial}{\partial v}\{{}^{12}_{\ 2}\}' - \frac{\partial}{\partial u}\{{}^{12}_{\ 1}\}'\right) \rho X$$

Sehingga didapat :

$$\frac{\partial}{\partial u} \{{}^{12}_{\ 1}\}' = \frac{\partial}{\partial v} \{{}^{12}_{\ 2}\}'$$

Bila syarat-syarat ini dipenuhi oleh sebuah sistim kurva pada bola, ia menyatakan garis-garis asimtot pada sebuah permukaan tertentu S, yang koordinat-koordinatnya diberikan dengan persamaan kwadrat :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{D'}{H^2} \left(\mathcal{F} \frac{\partial X}{\partial u} - \mathcal{E} \frac{\partial X}{\partial v} \right) \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{D'}{H^2} \left(- \mathcal{G} \frac{\partial X}{\partial u} + \mathcal{F} \frac{\partial X}{\partial v} \right)$$

Begitu pula bila diambil persamaan untuk Y dan Z, dengan mengkombinasikan persamaan-persamaan ini dengan (2.19) didapat :

$$\sum \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} = 0 \quad , \quad \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \sum \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} = 0 \quad , \quad \sum \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

Sehingga S dan S_1 berhubungan dengan ortogonalitas dari elemen-elemen linier dan normal-normal ke S sejajar garis-garis kongruensi sehingga dapat disimpulkan :

Sebuah syarat perlu dan cukup bahwa penghamparan sebuah kongruensi memotong permukaan tengah dalam sebuah sistim konyugate adalah bahwa bentuk mereka juga merupakan garis-garis asimtot dari sebuah permukaan dengan permukaan tersebut dan permukaan tengah berhubungan dengan ortogonalitas elemen-elemen linier.

II.7. SIMBOL-SIMBOL CHRISTOFFEL

Simbol Christoffel dalam pernyataan pada bentuk differensial adalah :

$$\begin{bmatrix} i \quad k \\ l \end{bmatrix}$$

dimana E,F,G ; D,D´,D´´ merupakan besaran fundamental order dari suatu luasan. Christoffel menggunakan 2 himpunan simbol yang mewakili fungsi tertentu dari koefisien-koefisien bentuk kwadrat dan derivatif-derivatif dari order satu. Jika bentuk kwadrat didifferensial akan berbentuk :

$$a_{11}\, du_1^2 + 2\, a_{12}\, du_1\, du_2 + a_{22}\, du_2^2 \; \ldots\ldots \quad (2.20)$$

Simbol pertama didifinisikan :

$$\begin{bmatrix} i & k \\ & l \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{il}}{\partial u_k} + \frac{\partial a_{kl}}{\partial u_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial u_l} \right)$$

Dimana setiap i, k, l nilainya 1 atau 2 dan ternyata :

$$\begin{bmatrix} i & k \\ & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & i \\ & l \end{bmatrix}$$

Bila digunakan dalam bentuk kwadrat fundamental pertama :

$$ds^2 = E\, du^2 + 2F\, dudv + G\, dv^2$$

Maka akan didapat :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{11}}{\partial u_1} + \frac{\partial a_{11}}{\partial u_1} - \frac{\partial a_{11}}{\partial u_1} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u}$$

dimana $u_1 = u$, $u_2 = v$ maka $a_{11} = E$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{11}}{\partial u_2} + \frac{\partial a_{21}}{\partial u_1} - \frac{\partial a_{12}}{\partial u_1} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v}$$

untuk $a_{12} = a_{21}$, $u_2 = v$ maka $a_{11} = E$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{21}}{\partial u_2} + \frac{\partial a_{21}}{\partial u_2} - \frac{\partial a_{22}}{\partial u_1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial u} \right)$$

$$= \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} \qquad \text{untuk} \quad u_1 = u \;, \quad u_2 = v \;, \quad a_{21} = F \;, \quad a_{22} = G$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ & 2 & \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial a_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial a_{11}}{\partial u_2} \right) = \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial E}{\partial v} \right)$$

$$= \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} \qquad \text{dimana} \quad u_1 = u \;, \quad u_2 = v \;, \quad a_{12} = F \;, \quad a_{11} = E$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & 2 \\ & 2 & \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{12}}{\partial u_2} + \frac{\partial a_{22}}{\partial u_1} - \frac{\partial a_{12}}{\partial u_2} \right) = \frac{\partial G}{\partial u}$$

untuk $u_1 = u$, $a_{22} = G$

$$\begin{bmatrix} 2 & & 2 \\ & 2 & \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{22}}{\partial u_2} + \frac{\partial a_{22}}{\partial u_2} - \frac{\partial a_{22}}{\partial u_2} \right) = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}$$

Simbol kedua didifinisikan :

$$\begin{Bmatrix} i & & k \\ & \gamma & \end{Bmatrix} = A_{\gamma 1} \begin{bmatrix} i & & k \\ & 1 & \end{bmatrix} + A_{\gamma 2} \begin{bmatrix} k & & i \\ & 2 & \end{bmatrix}$$

Dimana $A_{\gamma 1}$ menyatakan komplemen aljabar dari $a_{\gamma 1}$ dibagi determinannya yaitu :

$$a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2$$

Pada bentuk kwadran fundamental pertama simbol itu berarti :

$$A11 = \frac{|\ a_{22}\ |}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2} = \frac{G}{E.G - F^2} = \frac{G}{H^2}$$

$$A12 = \frac{-\ |\ a_{12}\ |}{a_{11} \cdot a_{12} - a_{12}^2} = \frac{-\ F}{E.G - F^2} = \frac{-F}{H^2}$$

$$A22 = \frac{|\ a_{11}\ |}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2} = \frac{E}{E.G - F^2} = \frac{E}{H^2}$$

Dan :

$$\left\{\begin{matrix} 1 \quad 1 \\ 1 \end{matrix}\right\} = A_{11} \left[\begin{matrix} 1 \quad 1 \\ 1 \end{matrix}\right] + A_{12} \left[\begin{matrix} 1 \quad 1 \\ 2 \end{matrix}\right]$$

$$= \frac{G}{H^2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u} \right) + \frac{-F}{H^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} \right)$$

$$= \frac{G \frac{\partial E}{\partial u} - 2\ F \frac{\partial F}{\partial u} + F \frac{\partial E}{\partial v}}{2\ H^2}$$

$$\left\{\begin{matrix} 1 \quad 2 \\ 1 \end{matrix}\right\} = A_{11} \left[\begin{matrix} 1 \quad 2 \\ 1 \end{matrix}\right] + A_{12} \left[\begin{matrix} 1 \quad 2 \\ 2 \end{matrix}\right]$$

$$= \frac{G}{H^2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} \right) + \frac{-F}{H^2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \right)$$

$$= \frac{G \frac{\partial E}{\partial v} - F \frac{\partial G}{\partial u}}{2\ H^2}$$

$$\left\{\begin{matrix} 2 & & 2 \\ & 1 & \end{matrix}\right\} = A_{11} \left[\begin{matrix} 2 & & 2 \\ & 1 & \end{matrix}\right] + A_{12} \left[\begin{matrix} 2 & & 2 \\ & 2 & \end{matrix}\right]$$

$$= \frac{G}{H^2} \left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \right) + \frac{-F}{H^2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v} \right)$$

$$= \frac{2G \frac{\partial F}{\partial v} - G \frac{\partial G}{\partial u} - F \frac{\partial G}{\partial v}}{2 \; H^2}$$

$$\left\{\begin{matrix} 1 & & 1 \\ & 2 & \end{matrix}\right\} = A_{21} \left[\begin{matrix} 1 & & 1 \\ & 1 & \end{matrix}\right] + A_{22} \left[\begin{matrix} 1 & & 1 \\ & 2 & \end{matrix}\right]$$

$$= \frac{-F}{H^2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u} \right) + \frac{E}{H^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} \right)$$

$$= \frac{2E \frac{\partial F}{\partial u} - F \frac{\partial E}{\partial u} - E \frac{\partial E}{\partial v}}{2 \; H^2}$$

$$\left\{\begin{matrix} 1 & & 2 \\ & 2 & \end{matrix}\right\} = A_{21} \left[\begin{matrix} 1 & & 2 \\ & 2 & \end{matrix}\right] + A_{22} \left[\begin{matrix} 1 & & 2 \\ & 2 & \end{matrix}\right]$$

$$= \frac{-F}{H^2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} \right) + \frac{E}{H^2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \right)$$

$$= \frac{-F \frac{\partial E}{\partial v} + E \frac{\partial G}{\partial u}}{2 \; H^2}$$

$$\left\{\begin{matrix} 2 & & 2 \\ & 2 & \end{matrix}\right\} = A_{21} \left[\begin{matrix} 2 & & 2 \\ & 1 & \end{matrix}\right] + A_{22} \left[\begin{matrix} 2 & & 2 \\ & 2 & \end{matrix}\right]$$

$$= \frac{-F}{H^2}\left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right) + \frac{E}{H^2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}\right)$$

$$= \frac{E\frac{\partial G}{\partial v} + F\frac{\partial G}{\partial u} - 2F\frac{\partial F}{\partial v}}{2\,H^2}$$

Dengan difinisi simbol :

$\left\{\begin{matrix} i & k \\ & \nu \end{matrix}\right\}$ terdapat hubungan

$$\left[\begin{matrix} i & k \\ & 1 \end{matrix}\right] = a_{11}\left[\begin{matrix} i & k \\ & 1 \end{matrix}\right] + a_{12}\left[\begin{matrix} k & i \\ & 2 \end{matrix}\right]$$

Dan D, D′, D′′ didifinisikan oleh :

$$D = \sum \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} \quad , \quad D' = \sum \frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} \quad , \quad D'' = \sum \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}$$